Université d'Orléans

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉNERGIE ET DES MATÉRIAUX

CONCOURS 1991

Option : Spéciales C

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures — COEFFICIENT : 4

Le problème est constitué de trois parties indépendantes.
Le soin apporté aux calculs et la rigueur des raisonnements seront des éléments importants d'appréciation

Notation. — Pour a et b dans $\mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$, on note $[a, b] = \{k \in \mathbb{N} / a \leqslant k \leqslant b\} = [a, b] \cap \mathbb{N}$.

PREMIÈRE PARTIE

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, fixé. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$. On considère les familles de vecteurs de E :

$\mathscr{E} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E ;

$\mathscr{Q} = (Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ où $Q_k(X) = C_n^k X^k (1 - X)^{n-k}$ pour $k \leqslant n$;

$\mathscr{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$ où $F_0 = 1$ et $F_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

I.1. *a.* Montrer que $\mathscr{F}$ est une base de E.

b. Montrer que $\mathscr{Q}$ est une base de E, et préciser la matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{Q}$ ainsi que de la base $\mathscr{Q}$ à la base $\mathscr{E}$. Pour cela il pourra être utile de remarquer que pour tout $j \in [0, n]$, on peut écrire : $X^j = [X + (1 - X)]^{n-j} X^j$.

I.2. On considère l'application B définie sur E par :

$$\forall P \in E \qquad B(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) \cdot Q_k(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P\left(\frac{k}{n}\right) X^k \cdot (1 - X)^{n-k}.$$

a. Montrer que B est un endomorphisme de E.

b. Que vaut B (P) lorsque $P \in E$ est de degré $\leqslant 1$.

I.3. *a.* Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la fonction $\varphi : t \mapsto (t x + (1 - x))^n$.
Pour tout $j \in [0, n]$, calculer de deux façons $\varphi^{(j)}(1)$.

b. En déduire que pour tout $j \in [0, n]$: $\sum_{k=0}^{n} F_j(k) \cdot Q_k(X) = F_j(n) \cdot X^j$.

I.4. Pour tout $j \in [0, n]$, on pose $U_j(X) = \frac{1}{n^j} \cdot F_j(nX)$ et $\lambda_j = \frac{1}{n^j} F_j(n)$.

a. Montrer que $\mathscr{U} = (U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est une base de E.

b. Montrer que pour tout $j \in [0, n]$: $B(U_j)(X) = \lambda_j \cdot X^j$.

c. Prouver que B est bijective de E sur E.

A SUIVRE

I.5. *a.* Montrer que B est diagonalisable et préciser ses valeurs propres. On précisera notamment que 1 est valeur propre de B et on déterminera le sous-espace propre associé.

b. Justifier l'existence d'une unique famille $(H_2, \ldots, H_n)$ de vecteurs de E telle que :
pour tout $k \in [2, n]$, H_k est de degré k, de coefficient dominant égal à 1 (c'est-à-dire H_k « unitaire » ou « normalisé ») et $B(H_k) = \lambda_k \cdot H_k$.

c. On pose $H_0 = 1$ et $H_1(X) = X - \frac{1}{2}$.

Montrer que $\mathscr{H} = (H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n)$ est une base de E et préciser la matrice de B relativement à $\mathscr{H}$.

I.6. *a.* Prouver que pour tout $k \in [0, n]$, on a :

$$H_k(1 - X) = (-1)^k \cdot H_k(X).$$

b. Que vaut $H_k\left(\frac{1}{2}\right)$ pour k impair.

c. Calculer $H_k(0)$ et $H_k(1)$ pour $k \in [2, n]$.

d. En déduire l'expression de $H_2(X)$, ainsi que de $H_3(X)$ si l'on suppose $n \geqslant 3$.

I.7. On note Δ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E \qquad \Delta P(X) = P\left(X + \frac{1}{n}\right) - P(X).$$

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

b. Pour $k \in [1, n]$ on note Δ^k la composée de k applications égales à Δ, et $\Delta^0 = id_E$.
Justifier la formule :

$$\forall P \in E \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} F_k(nX) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} \cdot n^k \cdot U_k(X).$$

c. En déduire :

$$\forall P \in E \qquad B(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} n^k \cdot \lambda_k \cdot X^k$$

puis :

$$\forall P \in E, \qquad \forall j \in [0, n] \qquad B(P)\left(\frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} \lambda_k \cdot j^k.$$

DEUXIÈME PARTIE

On note $\mathscr{D}$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, de classe C^1.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application B_n sur $\mathscr{D}$ par :

$$\forall f \in \mathscr{D}, \qquad \forall x \in [0, 1] \qquad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot x^k \cdot (1 - x)^{n-k}.$$

II.1. Montrer que B_n est un endomorphisme de $\mathscr{D}$. Est-il surjectif ?

II.2. Justifier brièvement que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k - nx)^2 \cdot x^k \cdot (1 - x)^{n-k} = nx \cdot (1 - x)$.

Pour cela on pourra citer un résultat du cours de probabilité.

Tournez la page S.V.P.

II.3. Soit $f \in \mathscr{D}$.

a. Justifier l'existence de $K \geqslant 0$, tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant K \cdot |x - y|.$$

b. Soit $x \in [0, 1]$ fixé et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$I = \{ k \in [0, n] / \ |k - nx| \geqslant n \cdot \alpha \}$$

et

$$J = \{ k \in [0, n] / \ |k - nx| < n \cdot \alpha \}.$$

Montrer que si I est non vide, on a :

$$\sum_{k \in I} C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2 \alpha^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}.$$

En déduire que :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant K \left[\alpha + \frac{1}{4 \alpha^2 \cdot n} \right].$$

c. Conclure que l'on a le résultat :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}^*), (\forall n \in \mathbb{N}^*), (n \geqslant N \Rightarrow (\forall x \in [0, 1], |f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \varepsilon)).$$

Comment interprétez-vous ce résultat ?

II.4. *a.* Soit $f \in \mathscr{D}$ telle que : $\int_0^1 t^n \cdot f(t)\, dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En considérant $\int_0^1 f(t) [f(t) - B_n(f)(t)]\, dt$, et le résultat de II.3., justifier que $f = 0$.

b. Soit g une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que :

- $\lim_{+\infty} g = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} (e^t \cdot g'(t))$ existe dans $\mathbb{R}$,
- pour tout $x > 0$, $\int_0^{\infty} e^{-xt} g(t)\, dt$ existe et vaut 0.

Utiliser ce qui précède afin de justifier que $g = 0$.

II.5. *a.* Pour $f \in \mathscr{D}$, on considère $h : x \mapsto x \cdot f(x)$. Justifier que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad B_n(h)(x) = \frac{x(1 - x)}{n} \cdot (B_n(f))'(x) + x B_n(f)(x).$$

b. Pour $f \in \mathscr{D}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad (B_n(f))'(x) = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] C_{n-1}^k x^k (1 - x)^{n-1-k}.$$

En déduire que si f est croissante sur $[0, 1]$, il en est de même de $B_n(f)$.

A SUIVRE

TROISIÈME PARTIE

Soit $\lambda \in]0, 1]$, fixé. On note S le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites de réels, indexées par $\mathbb{N}$: $S = \mathscr{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Selon l'usage, si $a \in S$, on note $a_n = a(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III.1. On définit l'application φ_λ sur S par :

$$\forall a \in S \qquad \varphi_\lambda(a) : n \longmapsto \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k \lambda^k \cdot (1-\lambda)^{n-k}.$$

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

a. Montrer que φ_λ est un endomorphisme de S.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim_{n \to +\infty} [C_n^k \lambda^k (1-\lambda)^{n-k}] = 0$.

c. En déduire que si la suite a de S converge vers $l \in \mathbb{R}$, il en est de même de $\varphi_\lambda(a)$.

d. Donner un exemple de suite $a \in S$ divergente et telle que $\varphi_\lambda(a)$ converge pour $\lambda \in]0, 1[$.

III.2. Soit $a \in S$ et $A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1}$ la série entière associée, supposée être de rayon de convergence R tel que $0 < R$ et $(1-\lambda) R < \lambda$. On pose $b = \varphi_\lambda(a)$.

a. Soit y dans $\mathbb{R}$, avec $|y| < \dfrac{R}{\lambda + (1-\lambda) R}$, et $x = \dfrac{\lambda y}{1 - (1-\lambda) y}$. Montrer que $|x| < R$.

b. Pour $y \in \mathbb{R}$, avec $|y| < \dfrac{R}{\lambda + (1-\lambda) R}$, soit $x = \dfrac{\lambda y}{1 - (1-\lambda) y}$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^{n+1}.$$

On justifiera complètement cette formule lorsque a est une suite ayant ses termes nuls à partir d'un certain rang; puis on admettra dans le cas général la possibilité d'intervertir l'ordre des sommations.

c. On suppose ici que $\lambda \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et que a est la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k = P(X = k).$$

À quelle condition sur λ, la suite $b = \varphi_\lambda(a)$ est-elle aussi la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$?

III.3. Question subsidiaire, réservée à ceux qui ont traité tout le problème :

a. Que vaut $\varphi_\lambda \circ \varphi_{\lambda'}$ pour $\lambda, \lambda' \in]0, 1]$?

b. Soient $a \in S$, λ et λ' dans $]0, 1[$ avec $\lambda' \leqslant \lambda$. On pose $b = \varphi_\lambda(a)$ et $b' = \varphi_{\lambda'}(a)$. En supposant que b converge vers $l \in \mathbb{R}$, que peut-on dire de b'?

FIN